

On the irrationality measure function in average.

D. O. Shatskov

Abstract

We consider the value $I_\alpha(t) = \int_1^t \psi_\alpha(\xi) d\xi$, where $\psi_\alpha(t) = \min_{1 \leq q \leq t} \|q\alpha\|$. We prove that for almost all α one has $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = \frac{6 \log 2}{\pi^2}$. It is proved that there exist algebraically independent numbers α and β such that the difference $I_\alpha(t) - I_\beta(t)$ tends to infinity when $t \rightarrow +\infty$.

Bibliography: 10 titles.

Let α be a real irrational number. We consider the function

$$\psi_\alpha(t) = \min_{1 \leq q \leq t} \|q\alpha\|$$

(here q is an integer number and $\|\cdot\|$ stands for the distance to the nearest integer). For $0 < \alpha < 1$ we consider the continued fraction expansion

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}.$$

Let us define the convergents

$$\frac{p_\nu}{q_\nu} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_\nu].$$

For t from the range $q_\nu \leq t < q_{\nu+1}$ one has

$$\psi_\alpha(t) = \|q_\nu \alpha\| = |q_\nu \alpha - p_\nu|. \quad (1)$$

Let us recall the definition of *Lagrange spectrum* (see [9]):

$$\mathbb{L} = \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists \alpha \liminf_{t \rightarrow +\infty} t\psi_\alpha(t) = \lambda\},$$

and *Dirichlet spectrum* (see [3]):

$$\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists \alpha \limsup_{t \rightarrow +\infty} t\psi_\alpha(t) = \lambda\}.$$

⁰ Research is supported by the grant RFBR No. 12-01-00681-a.

There is a lot of results related to the structure of the sets \mathbb{L} , \mathbb{D} . In the present paper we study the integral

$$I_\alpha(t) = \int_1^t \psi_\alpha(\xi) d\xi.$$

As $0 < t\psi_\alpha(t) < 1$ for $t \geq 1$, we have $I_\alpha(t) < \ln t$.

Given $t > 1$ we define $N = N(\alpha, t)$ by the conditions

$$q_N \leq t < q_{N+1}. \quad (2)$$

It is clear that $N \rightarrow \infty$ when $t \rightarrow \infty$.

The main results of the present paper are as follows.

Theorem 1. *For almost all (in sense of Lebesgue measure) numbers α one has*

- 1) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} = \frac{1}{2},$
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = \frac{6 \ln 2}{\pi^2}.$

In the next two theorem we have calculated the extremal values for the quantity $\frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)}$.

Theorem 2. *For every irrational number $\alpha \in (0; 1)$ one has*

- 1) $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} \leq 1,$
- 2) $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} \geq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}.$

The bounds from Theorem 2 are optimal ones.

Theorem 3. *Given $d \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}; 1\right]$ there exists α , such that*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} = d.$$

In the paper [6] it is proved that for any two real numbers α, β , such that $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$, the difference function

$$\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t) \quad (3)$$

changes its sign infinitely many often as $t \rightarrow \infty$.

It is easy to show that for $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ one has

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\tau(t)}{\ln t} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right) : \ln \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right).$$

So one can easily find two algebraically independent real numbers α and β such that the limits

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} \quad \text{and} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\beta(t)}{\ln t}$$

are different. We see that it may happen that the difference $I_\alpha(t) - I_\beta(t)$ tends to infinity as $t \rightarrow +\infty$. This shows that there is no general oscillating property for the difference function $I_\alpha(t) - I_\beta(t)$.

For the integrals under consideration we have the following result.

Theorem 4. *Let $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ and $r_0, r_1, \dots, r_n, \dots$ be the denominators of the convergents fractions for α and β , respectively. Then for almost all (in sense of Lebesgue measure) pairs (α, β) in $[0, 1]^2$ one has*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \int_1^{q_n} \psi_\alpha(\xi) d\xi - \int_1^{r_n} \psi_\beta(\xi) d\xi \right| < +\infty.$$

О среднем значении меры иррациональности вещественных чисел.

Д. О. Шацков

1. Введение и формулировки результатов.

Для действительного α рассмотрим функцию

$$\psi_\alpha(t) = \min_{1 \leq q \leq t} \|q\alpha\|$$

(здесь минимум берется по целым q и $\|\cdot\|$ обозначает расстояние до ближайшего целого). Если рассмотреть разложение числа α в обыкновенную цепную дробь

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

и через

$$\frac{p_\nu}{q_\nu} = [a_0; , a_1, a_2, \dots, a_\nu]$$

обозначать подходящие к α дроби, то при $q_\nu \leq t < q_{\nu+1}$ будет иметь место

$$\psi_\alpha(t) = \|q_\nu \alpha\| = |q_\nu \alpha - p_\nu|. \quad (1)$$

Известны многочисленные исследования (см. [9]) спектра Лагранжа

$$\mathbb{L} = \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists \alpha \liminf_{t \rightarrow +\infty} t\psi_\alpha(t) = \lambda\}$$

и (см. [3]) спектра Дирихле

$$\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists \alpha \limsup_{t \rightarrow +\infty} t\psi_\alpha(t) = \lambda\}.$$

Предметом нашего изучения будет интеграл

$$I_\alpha(t) = \int_1^t \psi_\alpha(\xi) d\xi.$$

Поскольку $0 < t\psi_\alpha(t) < 1$ для любого $t \geq 1$, то сразу видим, что $I_\alpha(t) < \ln t$.

Через $N = N(\alpha, t)$ мы обозначим величину, задаваемую условием

$$q_N \leq t < q_{N+1}. \quad (2)$$

Ясно, что $N \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

В настоящей работе мы докажем следующий метрический результат.

Теорема 1. Для почти всех (в смысле меры Лебега) чисел α выполняются равенства

⁰Работа выполнена при поддержке РФФИ № 12-01-00681-а.

- 1) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} = \frac{1}{2},$
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} = \frac{6 \ln 2}{\pi^2}.$

Помимо метрического результата, мы докажем утверждение об экстремальных значениях величины $\frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)}.$

Теорема 2. Для любого иррационального $\alpha \in (0; 1)$ выполнены неравенства

- 1) $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} \leq 1,$
- 2) $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} \geq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}.$

Оценки, приводимые в теореме 2 точны. Более того, имеет место

Теорема 3. Для любого $d \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}; 1\right]$ существует α , такое что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} = d.$$

В недавней работе [6] доказано, что для двух вещественных чисел α, β , таких что $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$ разность

$$\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t) \tag{3}$$

бесконечно много раз меняет знак при $t \rightarrow \infty$.

Из формул (31), (10), (14) и леммы 2 настоящей статьи можно получить, что для $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ выполнено

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\tau(t)}{\ln t} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}\right) : \ln \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right).$$

Следовательно существуют алгебраически независимые α и β , такие что пределы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{\ln t} \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\beta(t)}{\ln t}$$

различны, и, следовательно разность $I_\alpha(t) - I_\beta(t)$ может стремиться к бесконечности при $t \rightarrow +\infty$. Таким образом, аналог теоремы об осцилляции разности (3) для интегралов $I_\alpha(t), I_\beta(t)$, вообще говоря, не имеет места. В настоящей статье мы доказываем несколько более слабый результат для рассматриваемых нами интегралов.

Теорема 4. Для почти всех (в смысле меры Лебега на $[0, 1]^2$) пар (α, β) верно следующее утверждение. Пусть $q_0, q_1, \dots, q_n, \dots$ и $r_0, r_1, \dots, r_n, \dots$ суть знаменатели подходящих дробей для α и β соответственно. Тогда

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \int_1^{q_n} \psi_\alpha(\xi) d\xi - \int_1^{r_n} \psi_\beta(\xi) d\xi \right| < +\infty.$$

Сначала в пунктах 2 и 3 мы приводим доказательство теоремы 2. Затем в пункте 4 мы доказываем теорему 3. В пункте 5 мы приводим необходимые сведения из эргодической теории, а затем в пунктах 6 и 7 доказываем теоремы 1 и 4.

2. Формулы с подходящими дробями.

Нам понадобится формула для погрешности приближения числа α его подходящей дробью $\frac{p_n}{q_n}$, которая имеет вид

$$||q_\nu \alpha|| = \frac{1}{q_\nu \alpha_{\nu+1} + q_{\nu-1}}, \quad (4)$$

или

$$q_\nu ||q_\nu \alpha|| = \frac{1}{\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*}, \quad (5)$$

где

$$\alpha_{\nu+1} = [a_{\nu+1}; a_{\nu+2}, \dots], \quad \alpha_\nu^* = [0; a_\nu, a_{\nu-1}, \dots, a_1] = \frac{q_{\nu-1}}{q_\nu}.$$

Формулы (1) и (4) позволяют записать интеграл $I_\alpha(t)$ в виде

$$I_\alpha(t) = \sum_{\nu=1}^N \frac{q_\nu - q_{\nu-1}}{q_{\nu-1} \alpha_\nu + q_{\nu-2}} + \frac{t - q_N}{q_N \alpha_{N+1} + q_{N-1}}, \quad (6)$$

где N определено в (2). Эту же формулу можно записать по-другому. Введем новое обозначение для слагаемых из формулы (6) и преобразуем их:

$$S_\nu(\alpha) = \frac{q_\nu - q_{\nu-1}}{q_{\nu-1} \left(a_\nu + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}} \right) + q_{\nu-2}} = \frac{q_\nu - q_{\nu-1}}{q_\nu + \frac{q_{\nu-1}}{\alpha_{\nu+1}}} = \frac{(q_\nu - q_{\nu-1}) \alpha_{\nu+1}}{q_\nu \alpha_{\nu+1} + q_{\nu-1}} = \frac{(1 - \alpha_\nu^*) \alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*}. \quad (7)$$

Для последнего слагаемого в формуле (6) аналогично получаем

$$A_{N+1}(\alpha, t) = \frac{t - q_N}{q_N \alpha_{N+1} + q_{N-1}} = \frac{\left(\frac{t}{q_{N+1}} - \alpha_{N+1}^* \right) \alpha_{N+2}}{\alpha_{N+2} + \alpha_{N+1}^*}.$$

Теперь формулу (6) можно записать

$$I_\alpha(t) = G_N(\alpha) + A_{N+1}(\alpha, t), \quad (8)$$

где

$$G_N(\alpha) = \sum_{\nu=1}^N S_\nu(\alpha). \quad (9)$$

Поскольку $\alpha_\nu > 1$, $\alpha_\nu^* \in [0, 1]$ получаем неравенство

$$0 \leq S_\nu(\alpha) < 1. \quad (10)$$

Ясно что

$$0 \leq A_{N+1}(\alpha, t) < S_{N+1}(\alpha). \quad (11)$$

Используя (9) и (10) выводим оценку сверху

$$G_N(\alpha) < N. \quad (12)$$

Из (8) ,(10) и (11) получаем ограничение на интеграл

$$G_N(\alpha) \leq I_\alpha(t) < G_{N+1}(\alpha), \quad (13)$$

и

$$I_\alpha(t) = G_N(\alpha) + O(1). \quad (14)$$

Неравенство (13) дает оценку сверху $I_\alpha(t) < N+1$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, из чего непосредственно следует пункт 1) теоремы 2.

3. Доказательство пункта 2) теоремы 2.

Для доказательства пункта 2) теоремы 2 нам понадобятся непрерывные дроби с *вещественными* неполными частными. В этом пункте и далее для записи бесконечного множества аргументов будем пользоваться обозначением $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots)$, где $x_i \in [1; +\infty)$, $i \in \mathbb{N}$. Определим функцию $\alpha(\bar{x}) = [0; x_1, x_2, \dots]$. Также определим функции $q_\nu(\bar{x})$ и $p_\nu(\bar{x})$ как континуанты

$$q_\nu(\bar{x}) = \begin{cases} \langle x_1, \dots, x_\nu \rangle, & \nu \geq 1; \\ 1, & \nu = 0; \\ 0, & \nu = -1, \end{cases} \quad p_\nu(\bar{x}) = \begin{cases} \langle x_1, \dots, x_{\nu-1} \rangle, & \nu \geq 1; \\ 0, & \nu = 0; \\ 1, & \nu = -1. \end{cases}$$

Для всех $\nu \geq 0$ выполняется (см [2]) неравенство

$$q_\nu(\bar{x}) \geq 2^{\frac{\nu-1}{2}}. \quad (15)$$

Рассмотрим функцию $\psi_{\alpha(\bar{x})}(t) = \|\alpha(\bar{x})q_N(\bar{x})\|$, интеграл $I_{\alpha(\bar{x})}(t) = \int_1^t \psi_{\alpha(\bar{x})}(\xi) d\xi$ и функции

$$\alpha_\nu(\bar{x}) = \begin{cases} [x_\nu; x_{\nu+1}, x_{\nu+2}, \dots], & \nu \geq 1; \\ [0; x_1, x_2, \dots], & \nu = 0, \end{cases} \quad \alpha_\nu^*(\bar{x}) = \begin{cases} [0; x_\nu, x_{\nu-1}, x_{\nu-2}, \dots, x_1], & \nu \geq 1; \\ 0, & \nu = 0. \end{cases}$$

При каждом \bar{x} выполняются следующие простейшие свойства:

$$\alpha_\nu(\bar{x}) > 1, \quad \nu \geq 1, \quad (16)$$

$$0 \leq \alpha_\nu^*(\bar{x}) \leq 1, \quad (17)$$

$$\alpha_\nu^*(\bar{x}) = \frac{q_{\nu-1}(\bar{x})}{q_\nu(\bar{x})}, \quad (18)$$

$$\alpha_\nu(\bar{x}) = x_\nu + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}(\bar{x})}, \quad (19)$$

$$\alpha_\nu^*(\bar{x}) = \frac{1}{x_\nu + \alpha_{\nu-1}^*(\bar{x})}, \quad (20)$$

$$\alpha_\nu(\bar{x}) - \frac{p_\nu(\bar{x})}{q_\nu(\bar{x})} = \frac{(-1)^\nu}{q^2(\bar{x})(\alpha_{\nu+1}(\bar{x}) + \alpha_\nu^*(\bar{x}))}. \quad (21)$$

По аналогии с (7) и (9) рассмотрим функции

$$S_\nu(\bar{x}) = \frac{(1 - \alpha_\nu^*(\bar{x}))\alpha_{\nu+1}(\bar{x})}{\alpha_{\nu+1}(\bar{x}) + \alpha_\nu^*(\bar{x})}, \quad G_n(\bar{x}) = \sum_{\nu=1}^n S_\nu(\bar{x}).$$

Аналогично формуле (14) можно получить равенство

$$I_\alpha(t) = G_N(\bar{x}) + O(1), \quad (22)$$

где N определено аналогично (2).

Найдем частные производные от функций $\alpha_\nu(\bar{x})$ и $\alpha_\nu^*(\bar{x})$ по переменной x_k . Для этого уточним зависимость от k -ого аргумента:

$$\alpha_\nu(\bar{x}) = \begin{cases} x_\nu + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}(\bar{x})} & \nu \leq k-1; \\ x_k + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}(\bar{x})}, & \nu = k; \\ x_\nu + \frac{1}{\alpha_{\nu+1}(\bar{x})}, & \nu \geq k+1, \end{cases} \quad \alpha_\nu^*(\bar{x}) = \begin{cases} \frac{1}{x_\nu + \alpha_{\nu-1}^*(\bar{x})}, & \nu < k; \\ \frac{1}{x_k + \alpha_{\nu-1}^*(\bar{x})}, & \nu = k; \\ \frac{1}{x_\nu + \alpha_{\nu-1}^*(\bar{x})}, & \nu \geq k+1. \end{cases}$$

Теперь для производных легко получить следующие соотношения:

$$(\alpha_\nu(\bar{x}))'_{x_k} = \begin{cases} -\frac{(\alpha_{\nu+1}(\bar{x}))'_{x_k}}{(\alpha_{\nu+1}(\bar{x}))^2}, & \nu \leq k-1; \\ 1, & \nu = k; \\ 0, & \nu \geq k+1, \end{cases} \quad (23)$$

$$(\alpha_\nu^*(\bar{x}))'_{x_k} = \begin{cases} 0, & \nu < k; \\ -\frac{1}{(x_k + \alpha_{\nu-1}^*(\bar{x}))^2}, & \nu = k; \\ -\frac{(\alpha_{\nu-1}^*(\bar{x}))'_{x_k}}{(x_\nu + \alpha_{\nu-1}^*(\bar{x}))^2}, & \nu \geq k+1. \end{cases} \quad (24)$$

Пусть $l \in \mathbb{N}_0$. Из (23) получаем

$$\text{sign} (\alpha_\nu(\bar{x}))'_{x_k} = \begin{cases} 1, & \nu = k - 2l; \\ -1, & \nu = k - 1 - 2l. \end{cases} \quad (25)$$

Аналогично и для $(\alpha_\nu^*(\bar{x}))'_{x_k}$ из (24) видно, что

$$\text{sign}(\alpha_\nu^*(\bar{x}))'_{x_k} = \begin{cases} -1, & \nu = k + 2l; \\ 1, & \nu = k + 1 + 2l. \end{cases} \quad (26)$$

Лемма 1. Функция $G_n(\bar{x})$ возрастает по каждому из первых $n + 1$ аргументу.

Доказательство: Покажем, что $(G_n(\bar{x}))'_{x_k} > 0$, для $k \leq n + 1$. Найдем производную по k -ому аргументу. В этом доказательстве не будем писать аргумент \bar{x} .

$$(G_n(\bar{x}))'_{x_k} = \sum_{\nu=1}^n \frac{(\alpha_{\nu+1})'_{x_k} (1 - \alpha_\nu^*) \alpha_\nu^*}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)^2} + \sum_{\nu=1}^n \frac{(-\alpha_\nu^*)'_{x_k} \alpha_{\nu+1} (\alpha_{\nu+1} + 1)}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)^2}. \quad (27)$$

Исследуем первую сумму из (27) и покажем, что она неотрицательная.

Воспользовавшись соотношением (23), отбросим нулевые слагаемые

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{(\alpha_{\nu+1})'_{x_k} (1 - \alpha_\nu^*) \alpha_\nu^*}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)^2} = \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{(\alpha_{\nu+1})'_{x_k} (1 - \alpha_\nu^*) \alpha_\nu^*}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)^2}.$$

В новой сумме, используя условие $\alpha_0^* = 0$, можно при необходимости сделать четное количество слагаемых, добавив слагаемое с $\nu = 0$. Сгруппируем слагаемые по два, начиная с последнего, и преобразуем сумму, воспользовавшись (19) и (23):

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{k-1} \frac{(\alpha_{\nu+1})'_{x_k} (1 - \alpha_\nu^*) \alpha_\nu^*}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)^2} &= \sum_{l=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]} \left(\frac{(1 - \alpha_{k-1-2l}^*) \alpha_{k-1-2l}^* (\alpha_{k-2l})'_{x_k}}{(\alpha_{k-2l} + \alpha_{k-1-2l}^*)^2} + \frac{(1 - \alpha_{k-2-2l}^*) \alpha_{k-2-2l}^* (\alpha_{k-1-2l})'_{x_k}}{(\alpha_{k-1-2l} + \alpha_{k-2-2l}^*)^2} \right) = \\ &= \sum_{l=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]} \left(\frac{\left(1 - \frac{1}{x_{k-1-2l} + \alpha_{k-2-2l}^*}\right) \frac{1}{x_{k-1-2l} + \alpha_{k-2-2l}^*}}{\left(\alpha_{k-2l} + \frac{1}{x_{k-1-2l} + \alpha_{k-2-2l}^*}\right)^2} (\alpha_{k-2l})'_{x_k} - \frac{(1 - \alpha_{k-2-2l}^*) \alpha_{k-2-2l}^*}{\left(x_{k-1-2l} + \frac{1}{\alpha_{k-2l}} + \alpha_{k-2-2l}^*\right)^2} \frac{(\alpha_{k-2l})'_{x_k}}{(\alpha_{k-2l})^2} \right) = \\ &= \sum_{l=0}^{\left[\frac{k-2}{2}\right]} (\alpha_{k-2l})'_{x_k} \left(\frac{x_{k-1-2l} - 1 + (\alpha_{k-2-2l}^*)^2}{(\alpha_{k-2l}(x_{k-1-2l} + \alpha_{k-2-2l}^*) + 1)^2} \right). \end{aligned}$$

Из (25), следует что $(\alpha_{k-2l})'_{x_k} > 0$, для всех l , а значит и вся сумма тоже положительна.

Покажем, что вторая сумма из (27) всегда не отрицательна.

Из (24) и (26) получаем, что сумма знакопеременная и начинается с положительного слагаемого при $\nu = k$. Сгруппируем слагаемые по два. Если в сумме нечетное количество слагаемых, то последнее слагаемое можно отбросить, ибо оно положительно, от этого сумма только уменьшится. Воспользуемся (19), (24), (26) и оценим сумму снизу

$$\sum_{\nu=1}^n \frac{(1 + \alpha_{\nu+1}) \alpha_{\nu+1} (-\alpha_\nu^*)'_{x_k}}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)^2} = \sum_{\nu=k}^n \frac{(1 + \alpha_{\nu+1}) \alpha_{\nu+1} (-\alpha_\nu^*)'_{x_k}}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)^2} \geq$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-k-1}{2}\right]} \left(-\frac{(1+\alpha_{k+1+2l})\alpha_{k+1+2l}(\alpha_{k+2l}^*)'_{x_k}}{(\alpha_{k+1+2l}+\alpha_{k+2l}^*)^2} - \frac{(1+\alpha_{k+2+2l})\alpha_{k+2+2l}(\alpha_{k+1+2l}^*)'_{x_k}}{(\alpha_{k+2+2l}+\alpha_{k+1+2l}^*)^2} \right) = \\
&\quad \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-k-1}{2}\right]} \left(-\frac{\left(1+x_{k+1+2l}+\frac{1}{\alpha_{k+2+2l}}\right)\left(x_{k+1+2l}+\frac{1}{\alpha_{k+2+2l}}\right)(\alpha_{k+2l}^*)'_{x_k}}{\left(x_{k+1+2l}+\frac{1}{\alpha_{k+2+2l}}+\alpha_{k+2l}^*\right)^2} - \right. \\
&\quad \left. -\frac{(1+\alpha_{k+2+2l})\alpha_{k+2+2l}}{\left(\alpha_{k+2+2l}+\frac{1}{x_{k+1+2l}+\alpha_{k+2l}^*}\right)^2} \frac{(-\alpha_{k+2l}^*)'_{x_k}}{(x_{k+1+2l}+\alpha_{k+2l}^*)^2} \right) = \\
&= \sum_{l=0}^{\left[\frac{n-k-1}{2}\right]} (-\alpha_{k+2l}^*)'_{x_k} \left(\frac{(\alpha_{k+2+2l}+x_{k+1+2l}\alpha_{k+2+2l}+1)(x_{k+1+2l}\alpha_{k+2+2l}+1) - (1+\alpha_{k+2+2l})\alpha_{k+2+2l}}{(\alpha_{k+2+2l}(x_{k+1+2l}+\alpha_{k+2l}^*)+1)^2} \right) > 0.
\end{aligned}$$

Получили, что производная положительна при $k \leq n+1$, значит функция $G_n(\bar{x})$ возрастает по первым $n+1$ аргументам. Доказательство леммы 1 завершено.

Из леммы 1 сразу получаем

Следствие 1. Для любого набора \bar{x} и $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$G_n(\bar{x}) \geq G_n(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n+1}, x_{n+2}, \dots). \quad (28)$$

Возьмем вещественное число z , для него рассмотрим набор $\bar{z} = (z, z, \dots)$ и определим число

$$S(z) = \frac{(1-\alpha(\bar{z}))(z+\alpha(\bar{z}))}{z+2\alpha(\bar{z})}. \quad (29)$$

Лемма 2. Для любого $z \in [1, +\infty)$ выполняется неравенство

$$|G_n(\bar{z}) - S(z)n| \leq 4.$$

Доказательство: Для $\bar{z} = (z, z, \dots)$ выполняется свойство $\alpha_\nu^*(\bar{z}) = \frac{p_\nu(\bar{z})}{q_\nu(\bar{z})}$, которые позволяют записать разность (21) следующим образом

$$\alpha(\bar{z}) - \alpha_\nu^*(\bar{z}) = \frac{(-1)^\nu}{q_\nu^2(\bar{z})(\alpha_{\nu+1}(\bar{z}) + \alpha_\nu^*(\bar{z}))}.$$

Запишем $G_n(\bar{z})$ следующим образом

$$G_n(\bar{z}) = \sum_{\nu=1}^n S(z) + \sum_{\nu=1}^n (S_\nu(\bar{z}) - S(z)).$$

Воспользуемся (15) и покажем, что ряд $\sum_{\nu=1}^{\infty} (S_\nu(\bar{z}) - S(z))$ сходится абсолютно

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |S_\nu(\bar{z}) - S(z)| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{(1-\alpha_\nu^*(\bar{z}))\alpha_{\nu+1}(\bar{z})}{\alpha_{\nu+1}(\bar{z}) + \alpha_\nu^*(\bar{z})} - \frac{(1-\alpha(\bar{z}))\alpha_{\nu+1}(\bar{z})}{\alpha_{\nu+1}(\bar{z}) + \alpha(\bar{z})} \right| =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\alpha_{\nu+1}(\alpha_{\nu+1} + 1)}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_{\nu}^*)^2(\alpha_{\nu+1} + \alpha)q_{\nu}^2(\bar{z})} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{q_{\nu}^2(\bar{z})} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{4}{2^{\nu}} = 4,$$

откуда

$$|G_n(\bar{z}) - S(z)n| \leq 4,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 3. Пусть $\bar{x} = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$ и $\bar{y} = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1}, y_{n+2}, \dots)$, тогда

$$|G_n(\bar{x}) - G_n(\bar{y})| < 1.$$

Доказательство. При $\nu \leq n+1$ для функций $\alpha_{\nu}^*(\bar{x})$ и $\alpha_{\nu}^*(\bar{y})$ выполняется равенство

$$\alpha_{\nu}^*(\bar{x}) = \alpha_{\nu}^*(\bar{y}).$$

Так как $\alpha_{\nu}(\bar{x}) = [x_{\nu}; x_{\nu+1}, \dots, x_{n+1}, a_{n+2}, \dots]$ и $\alpha_{\nu}(\bar{y}) = [x_{\nu}; x_{\nu+1}, \dots, x_{n+1}, b_{n+2}, \dots]$, то значения обеих функций лежат между числами $\frac{p_{n-\nu+1}(\bar{x})}{q_{n-\nu+1}(\bar{x})}$ и $\frac{p_{n-\nu+1}(\bar{x})+p_{n-\nu}(\bar{x})}{q_{n-\nu+1}(\bar{x})+q_{n-\nu}(\bar{x})}$ (см. [2]). Неравенство (15) позволяет оценить расстояние между ними:

$$|\alpha_{\nu}(\bar{x}) - \alpha_{\nu}(\bar{y})| < \frac{1}{q_{n-\nu+1}(\bar{x})(q_{n-\nu}(\bar{x}) + q_{n-\nu+1}(\bar{x}))} \leq \frac{1}{2^{n-\nu}}.$$

Оценим разность

$$\begin{aligned} |S_{\nu}(\bar{x}) - S_{\nu}(\bar{y})| &= \left| \frac{(1 - \alpha_{\nu}^*(\bar{x}))\alpha_{\nu+1}(\bar{x})}{\alpha_{\nu}^*(\bar{x}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{x})} - \frac{(1 - \alpha_{\nu}^*(\bar{y}))\alpha_{\nu+1}(\bar{y})}{\alpha_{\nu}^*(\bar{y}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{y})} \right| = \\ &= (1 - \alpha_{\nu}^*(\bar{x})) \left| \frac{\alpha_{\nu+1}(\bar{x})\alpha_{\nu}^*(\bar{x}) - \alpha_{\nu+1}(\bar{y})\alpha_{\nu}^*(\bar{x})}{(\alpha_{\nu}^*(\bar{x}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{x}))(\alpha_{\nu}^*(\bar{x}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{y}))} \right| \leq \\ &\leq (1 - \alpha_{\nu}^*(\bar{x}))\alpha_{\nu}^*(\bar{x})|\alpha_{\nu+1}(\bar{x}) - \alpha_{\nu+1}(\bar{y})| \leq \frac{1}{4}|\alpha_{\nu+1}(\bar{x}) - \alpha_{\nu+1}(\bar{y})| \leq \frac{1}{2^{n-\nu+1}}. \end{aligned}$$

Далее

$$|G_n(\bar{z}) - G_n(\bar{y})| = \left| \sum_{\nu=1}^n S_{\nu}(\bar{z}) - \sum_{\nu=1}^n S_{\nu}(\bar{y}) \right| \leq \sum_{\nu=1}^n |S_{\nu}(\bar{z}) - S_{\nu}(\bar{y})| \leq \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{2^{n-\nu+1}} < 1.$$

Доказательство леммы 3 завершено.

Следствие 2. Для $\bar{y} = (\underbrace{z, \dots, z}_{n+1}, y_{n+2}, \dots)$ из лемм 2 и 3 получаем что

$$|G_n(\bar{y}) - S(z)n| < 5. \quad (30)$$

Теперь мы завершим доказательство пункта 2) теоремы 2. Из (14), (28), (29) и (30) получаем, что для любого набора \bar{x} выполняется

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{I_{\alpha(\bar{x})}(t)}{N} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{G_N(\bar{x})}{N} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(\bar{x})}{n} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(1, 1, \dots, 1, y_{n+2}, \dots)}{n} = S(1) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} \right).$$

Доказательство теоремы 2 завершено.

4. Доказательство теоремы 3.

Лемма 4. Пусть $\bar{x} = (0; x, z_2, z_3 \dots)$, $\bar{y} = (0; y, z_2, z_3 \dots)$ и $n \in \mathbb{N}$ тогда

$$|G_n(\bar{x}) - G_n(\bar{y})| < 8.$$

Доказательство. Оба числа $\alpha_\nu^*(\bar{x})$ и $\alpha_\nu^*(\bar{y})$ попадают в интервал между числами $\frac{p_{\nu-1}(\bar{x})}{q_{\nu-1}(\bar{x})}$ и $\frac{p_{\nu-1}(\bar{x})+p_{\nu-2}(\bar{x})}{q_{\nu-1}(\bar{x})+q_{\nu-2}(\bar{x})}$ (см. [2]), где $\frac{p_\nu(\bar{x})}{q_\nu(\bar{x})}$ - подходящая дробь к $\alpha_\nu^*(\bar{x})$. Это позволяет оценить расстояние между ними:

$$|\alpha_\nu^*(\bar{x}) - \alpha_\nu^*(\bar{y})| < \frac{1}{q_{\nu-1}(\bar{x})(q_{\nu-2}(\bar{x}) + q_{n-1}(\bar{x}))} \leq \frac{1}{2^{\nu-2}}.$$

При $\nu \geq 2$ выполняется равенство

$$\alpha_\nu(\bar{x}) = \alpha_\nu(\bar{y}).$$

Оценим разность

$$\begin{aligned} |G_n(\bar{x}) - G_n(\bar{y})| &= \left| \sum_{\nu=1}^n S_\nu(\bar{x}) - \sum_{\nu=1}^n S_\nu(\bar{y}) \right| \leq \sum_{\nu=1}^n |S_\nu(\bar{x}) - S_\nu(\bar{y})| = \\ &= \sum_{\nu=1}^n \left| \frac{(1 - \alpha_\nu^*(\bar{x}))\alpha_{\nu+1}(\bar{x})}{\alpha_\nu^*(\bar{x}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{x})} - \frac{(1 - \alpha_\nu^*(\bar{y}))\alpha_{\nu+1}(\bar{y})}{\alpha_\nu^*(\bar{y}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{y})} \right| = \\ &= \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu+1}(\bar{x}) \left| \frac{\alpha_\nu^*(\bar{y}) - \alpha_\nu^*(\bar{x})\alpha_{\nu+1}(\bar{y}) - \alpha_\nu^*(\bar{x}) + \alpha_\nu^*(\bar{y})\alpha_{\nu+1}(\bar{x})}{(\alpha_\nu^*(\bar{x}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{x}))(\alpha_\nu^*(\bar{y}) + \alpha_{\nu+1}(\bar{y}))} \right| \leq \\ &\leq \sum_{\nu=1}^n \frac{\alpha_{\nu+1}(\bar{x})(1 + \alpha_{\nu+1}(\bar{y}))}{\alpha_{\nu+1}(\bar{x})\alpha_{\nu+1}(\bar{y})} |\alpha_\nu^*(\bar{y}) - \alpha_\nu^*(\bar{x})| \leq 2 \sum_{\nu=1}^n |\alpha_\nu^*(\bar{y}) - \alpha_\nu^*(\bar{x})| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{8}{2^\nu} = 8. \end{aligned}$$

Доказательство леммы 4 завершено.

Из следствия 2 и леммы 4 получаем, что для набора $\bar{x} = (x_1, \underbrace{z, z, \dots, z}_n, x_{n+2}, \dots)$ выполняется неравенство

$$|G_n(\alpha) - S(z)n| < 13. \quad (31)$$

Сумма $G_n(\alpha)$ зависит от $n+1$ аргумента $(a_1, a_2, \dots, a_n, \alpha_{n+1})$. В дальнейшем рассуждении нам удобно выделить зависимость от последнего аргумента. Для числа $\alpha = [0; a_1, a_2, \dots]$ через $G_n(\alpha, x)$ будем обозначать сумму для набора $(a_1, a_2, \dots, a_n, x)$, где $x \in (1, +\infty)$. Обозначим $G_n(\alpha, +\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} G_n(\alpha, x)$ и $G_n(\alpha, 1) = \lim_{x \rightarrow 1} G_n(\alpha, x)$.

Утверждение. Для любых $x, y \in (1, +\infty)$ выполняется неравенство

$$|G_{n-1}(\alpha, x) - G_n(\alpha, y)| < 3. \quad (32)$$

Доказательство. Из леммы 1 и леммы 3 получаем

$$0 < G_n(\alpha, +\infty) - G_n(\alpha, 1) < 1.$$

Из формулы (9) можно вывести равенство

$$G_n(\alpha, +\infty) = G_{n-1}(\alpha, a_n) + (1 - \alpha_n^*).$$

Объединив эти формулы, получаем неравенство

$$|G_{n-1}(\alpha, a_n) - G_n(\alpha, 1)| < 1.$$

Применим лемму 3 для каждой из сумм и получим утверждение.

Для функции $S(z)$ выполняются свойства:

- 1) она монотонно возрастает;
- 2) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10} = S(1) \leq S(z) \leq S(+\infty) = 1$.

Для любого $d = \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10}, 1\right)$ можно взять натуральные числа a и b , такие чтобы выполнялось условие $S(a) \leq d < S(b)$.

Лемма 5. Существует t_{min} такое, что для любого набора (a_1, \dots, a_k) и любого $x \in [1, +\infty)$ при всех $t > t_{min}$ выполняются неравенства:

1)

$$\frac{G_{k+t}(\alpha, x)}{k+t} < d,$$

для всех чисел вида $\alpha = [a_1, \dots, a_k, \underbrace{a, \dots, a}_t, x]$;

2)

$$\frac{G_{k+t}(\beta, x)}{k+t} > d,$$

для всех чисел вида $\beta = [a_1, \dots, a_k, \underbrace{b, \dots, b}_t, x]$.

Доказательство. Запишем сумму G_{k+t} следующим образом

$$G_{k+t} = G_k + \sum_{\nu=k+1}^{k+t} S_\nu,$$

Сумма $\sum_{\nu=k+1}^{k+t} S_\nu$ есть ни что иное как G_t для числа $(\frac{1}{\alpha_{n+1}^*}, \underbrace{a, \dots, a}_{t-1}, x)$. Запишем G_{k+t} через две суммы, а потом применим лемму 4 и получим равенство

$$G_{k+t}(\alpha, x) = G_k + G_t \left(\frac{1}{\alpha_{n+1}^*}, \underbrace{a, \dots, a}_{t-1}, x \right) = G_k + S(a)(t-1) + R, \quad (33)$$

где $R < 13$. Рассмотрим предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{G_{k+t}}{k+t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{G_k + S(a)(t-1) + R}{k+t} = S(a) < d.$$

Откуда следует утверждение леммы. Пункт 2 доказывается аналогично.

Для последовательности натуральных чисел n_ν будем обозначать частичную сумму через $W_t = \sum_{\nu=1}^t n_\nu$.

Следствие 3. Существует $\alpha = [0; \underbrace{a, \dots, a}_{n_1}, \underbrace{b, \dots, b}_{n_2}, \underbrace{a, \dots, a}_{n_3}, \dots]$, такое что

$$\frac{G_{n_1}(\alpha, +\infty)}{n_1} < d,$$

и для четного t выполняется

$$\frac{G_{W_t-1}(\alpha, 1)}{W_t - 1} < d < \frac{G_{W_t}(\alpha, 1)}{W_t},$$

а для нечетного $t > 1$ выполняется

$$\frac{G_{W_t}(\alpha, +\infty)}{W_t} < d < \frac{G_{W_t-1}(\alpha, +\infty)}{W_t - 1}.$$

Замечание. При доказательстве следствия 3 в качестве n_ν надо брать t_{min} из леммы 5.

Доказательство теоремы 3. Возьмем число α из следствия 3 и покажем, что все n_{t+1} ограничены. Пусть t нечетно, тогда

$$\frac{G_{W_t}(\alpha, 1)}{W_t} < \frac{G_{W_t}(\alpha, +\infty)}{W_t} < d,$$

$$\frac{G_{W_{t+1}-1}(\alpha, 1)}{W_{t+1} - 1} < d.$$

Обозначим $\tilde{b} = [\underbrace{b, \dots, b}_{n_{t+1}-1}, 1]$. По лемме 3 получаем

$$G_{W_t}(\alpha, \tilde{b}) = G_{W_t}(\alpha, 1) + R_1,$$

где $|R_1| < 1$. Воспользуемся (33) и распишем

$$G_{W_{t+1}-1}(\alpha, 1) = G_{W_t}(\alpha, \tilde{b}) + S(b)(n_{t+1} - 1) + R = G_{W_t}(\alpha, 1) + S(b)n_{t+1} + R + R_1 - S(b),$$

$$\frac{G_{W_t}(\alpha, 1) + S(b)n_{t+1} + R + R_1 - S(b)}{W_t + n_{t+1} - 1} = \frac{G_{W_{t+1}-1}(\alpha, 1)}{W_{t+1} - 1} < d,$$

и получаем

$$n_{t+1} < \frac{dW_t - G_{W_t}(\alpha, 1) - d - R - R_1 + S(b)}{S(b) - d}.$$

Пусть t четно, тогда

$$d < \frac{G_{W_t}(\alpha, 1)}{W_t} < \frac{G_{W_t}(\alpha, +\infty)}{W_t},$$

$$d < \frac{G_{W_{t+1}-1}(\alpha, +\infty)}{W_{t+1} - 1}.$$

Обозначим $\tilde{a} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{[a; a, \dots, a, x]}_{n_{t+1}-1} = \underbrace{[a; a, \dots, a]}_{n_{t+1}-1}$. По лемме 3 и (9) для \tilde{a} получаем

$$G_{W_t}(\tilde{a}) = G_{W_t}(\alpha, 1) + R_2,$$

где $|R_2| < 1$. Подставим

$$G_{W_{t+1}-1}(\alpha, +\infty) = G_{W_t}(\alpha, \tilde{a}) + S(a)(n_{t+1} - 1) + R = G_{W_t}(\alpha, 1) + S(a)n_{t+1} + R + R_2 - S(a),$$

$$\begin{aligned} d &< \frac{G_{W_{t+1}-1}(\alpha, +\infty)}{W_{t+1} - 1} = \frac{G_{W_t}(\alpha, 1) + S(a)n_{t+1} + R + R_2 - S(a)}{W_t + n_{t+1} - 1}, \\ n_{t+1} &< \frac{d + R + R_2 + S(a) + G_{W_t}(1) - dW_t}{d - S(a)}. \end{aligned}$$

В обоих случаях все n_{t+1} ограничены некоторой константой, назовем её M .

Для $\frac{G_n(\alpha)}{n}$ и $\frac{G_{n+k}(\alpha)}{n+k}$ из (9), (10) и (12) выводим неравенство

$$\left| \frac{G_{n+k}}{n+k} - \frac{G_n}{n} \right| = \left| \frac{G_n + \sum_{\nu=n+1}^{n+k} S_\nu}{n+k} - \frac{G_n}{n} \right| = \left| \frac{\sum_{\nu=n+1}^{n+k} S_\nu - k \frac{G_n}{n}}{n+k} \right| < \frac{k}{n+k}. \quad (34)$$

Для последовательности $\frac{G_n(\alpha)}{n}$ выполняются свойства:

- 1) $\left| \frac{G_n}{n} - \frac{G_{n+1}}{n+1} \right| < \frac{1}{n}$ из (34),
- 2) $\left| \frac{G_{W_t}}{W_t} - d \right| < \frac{3}{W_t}$ из утверждения и следствия 3,
- 3) $W_{t+1} - W_t < M$ из ограниченности n_t .

Пусть $n \in [W_t, W_{t+1})$, тогда из свойств 1 и 3 получаем $\left| \frac{G_n}{n} - d \right| < \frac{M+3}{W_t}$. Для $n > M$ получим, что $n - M < W_t$ и $\left| \frac{G_n}{n} - d \right| < \frac{M+3}{n-M}$.

Возьмем предел от правой и левой частей

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{G_n}{n} - d \right| < \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{M+3}{n-M} = 0,$$

или

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{G_n}{n} = d.$$

Случай $d = 1$ получается для числа, у которого неполные частные образуют возрастающую последовательность. Теорема 3 доказана.

5. Эргодические свойства преобразования Гаусса.

Нам понадобятся некоторые сведения из эргодической теории. Основные нужные нам понятия и утверждения имеются в [1] (см. также [4, 5]).

Рассмотрим преобразование Гаусса $T : [0; 1) \rightarrow [0; 1)$, которое есть эндоморфизм задаваемый формулой

$$Tx = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{x} \right\}, & \text{при } x \neq 0; \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Если для x известно его разложение в цепную дробь $x = [0; a_1, a_2, a_3, \dots]$, то

$$Tx = [0, a_2, a_3, \dots].$$

Инвариантная мера для преобразования Гаусса задается формулой

$$\mu(A) = \frac{1}{\ln 2} \int_A \frac{1}{1+x} dx.$$

Естественным расширением для преобразования Гаусса будет автоморфизм $\hat{T} : [0; 1)^2 \rightarrow [0; 1)^2$, определяемый как

$$\hat{T}(x, y) = \begin{cases} \left(\left\{ \frac{1}{x} \right\}, \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + y} \right), & \text{при } x \neq 0; \\ (0, y), & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

У естественного расширения \hat{T} инвариантная мера есть

$$\mu_2(A) = \frac{1}{\ln 2} \int \int_A \frac{1}{(1+xy)^2} dx dy.$$

Преобразование \hat{T} обладает свойством K -перемешивания. В частности, преобразование \hat{T} эргодично, и, согласно теореме Биркгофа-Хинчина, для любой абсолютно интегрируемой функции $f(x, y)$ асимптотическое равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu(x, y)) = \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 \int_0^1 \frac{f(x, y) dx dy}{(1+xy)^2} \quad (35)$$

будет выполнено для почти всех $(x, y) \in [0, 1)^2$.

Если на точку (x, y) подействовать преобразованием \hat{T}^ν , то

$$\hat{T}^\nu(x, y) = \left(T^\nu(x), \frac{q_{\nu-1} + yp_{\nu-1}}{q_\nu + yp_\nu} \right). \quad (36)$$

где $\frac{p_\nu}{q_\nu}$ - подходящие дроби для x .

Рассмотрим преобразование $\hat{\hat{T}} : [0, 1)^2 \rightarrow [0, 1)^2$, которое определим так

$$\hat{\hat{T}} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{T}(z_1) \\ \hat{T}(z_2) \end{pmatrix}, \quad z_1, z_2 \in [0, 1)^2.$$

Его инвариантная мера есть $\mu_2(z_1) \times \mu_2(z_2)$. Преобразование $\widehat{\widehat{T}}$ эргодично, это следует из того, что \widehat{T} обладает свойством перемешивания (см. [7]).

Следующая теорема доказана Халасом (см. [8]).

Теорема Халаса. *Для любой интегрируемой функции $\varphi(p)$ и любого эргодического преобразования T пространства R конечной меры выражение*

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \varphi(T^\nu p) - n \int_R \varphi(p) d\mu$$

для почти всех p , меняет знак бесконечное число раз в слабом смысле, т.е. эта разность не может быть постоянно положительной или отрицательной.

Применяя эту теорему к эргодическому преобразованию $\widehat{\widehat{T}}$, получим

Следствие 3. *Для почти всех $(z_1, z_2) = (x_1, y_1, x_2, y_2) \in [0, 1)^2 \times [0, 1)^2$ и для любой μ_2 -интегрируемой функции $f(z) = f(x, y)$ разностная функция*

$$\sum_{\nu=1}^n f(\widehat{T}^\nu z_1) - \sum_{\nu=1}^n f(\widehat{T}^\nu z_2),$$

меняет знак бесконечное число раз в слабом смысле.

6. Доказательства Теоремы 1. Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \frac{1-y}{1+xy}. \quad (37)$$

Поскольку

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1-y}{(1+xy)^3} dx dy = \frac{\ln 2}{2},$$

то применяя теорему Биркгофа-Хинчина (35), приходим к равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(\widehat{T}^\nu(x, y)) = \frac{1}{2}. \quad (38)$$

Отметим, что если $(x, y) = \left(\frac{1}{\alpha_1}, 0\right)$, то $f(\widehat{T}^\nu(x, 0)) = \frac{(1-\alpha_\nu^*)}{1+\frac{\alpha_\nu^*}{\alpha_1}}$, и $G_n(\alpha) = \sum_{\nu=1}^n f(\widehat{T}^\nu(x, 0))$. Следующее утверждение, близко к использовавшемуся в работе [10]

Лемма 5. *Для любого $(x, y) \in [0; 1)^2$ и любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$\sum_{\nu=1}^n \left| f(\widehat{T}^\nu(x, y)) - f(\widehat{T}^\nu(x, 0)) \right| < 4.$$

Доказательство. Покажем, что ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(f(\widehat{T}^\nu(x, 0)) - f(\widehat{T}^\nu(x, y)) \right)$$

сходится абсолютно. Обозначим $\tilde{\alpha}_\nu = \frac{q_{\nu-1} + yp_{\nu-1}}{q_\nu + yp_\nu}$. Далее

$$\sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu(x, 0)) = \sum_{\nu}^n \frac{(1 - \alpha_\nu^*)\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*},$$

$$\sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu(x, y)) = \sum_{\nu}^n \frac{(1 - \tilde{\alpha}_\nu)\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1} + \tilde{\alpha}_\nu}.$$

Рассмотрим ряд

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} |f(\hat{T}^\nu(x, y)) - f(\hat{T}^\nu(x, 0))| &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left| \frac{(1 - \tilde{\alpha}_\nu)\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1} + \tilde{\alpha}_\nu} - \frac{(1 - \alpha_\nu^*)\alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*} \right| = \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu+1} \left| \frac{\tilde{\alpha}_\nu - \alpha_\nu^* + \tilde{\alpha}_\nu \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu^* \alpha_{\nu+1}}{(\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu^*)(\alpha_{\nu+1} + \tilde{\alpha}_\nu)} \right| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1 + \alpha_{\nu+1}}{\alpha_{\nu+1}} |\tilde{\alpha}_\nu - \alpha_\nu^*| \leq \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2y}{q_\nu(q_\nu + yp_\nu)} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{q_\nu(q_\nu + p_\nu)} < 4. \end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

Следствие 4. Для любого $y \in [0; 1]$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu(x, y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu(x, 0)).$$

Обозначим через R множество тех точек $(x, y) \in [0, 1]^2$, для которых выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu(x, y)) = \frac{1}{2}.$$

Мера множества R равна 1. Рассмотрим проекцию

$$\tilde{R} = \{x \in [0, 1] | \exists y : (x, y) \in R\}.$$

Мера множества \tilde{R} тоже будет равна 1. Согласно формуле (14) и следствию 4 выполняется равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I_\alpha(t)}{N(\alpha, t)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_n(\alpha)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu(x, 0)) = \frac{1}{2}.$$

Пункт 1) теоремы 1 доказан.

Для доказательства пункта 2) теоремы 1 нам понадобится т. Леви (см [2]).

Теорема Леви. Для почти всех $\alpha \in (0; 1)$ имеет место следующее равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln q_n}{n} = \frac{\pi^2}{12 \ln 2}.$$

Из теоремы Леви получаем что для почти всех α выполнено равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln t}{N(\alpha, t)} = \frac{\pi^2}{12 \ln 12}.$$

Пункт 2) теоремы 1 получается из пункта 1) теоремы 1 и последнего равенства. Теорема 2 полностью доказана.

7. Доказательство теоремы 4. Снова рассматриваем функцию f определенную в (37). Пусть $R_1 \subset [0, 1)^2 \times [0, 1)^2$ это множество для тех точек $(z_1, z_2) = ((x_1, y_1), (x_2, y_2))$, для которых выполняется следствие 3. Его мера равняется 1. Для $(z_1, z_2) \in R_1$ рассмотрим только те значения n для которых суммы

$$\sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu z_1) - \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu z_2), \quad \sum_{\nu=1}^{n+1} f(\hat{T}^\nu z_1) - \sum_{\nu=1}^{n+1} f(\hat{T}^\nu z_2)$$

имеют различные знаки. Тогда, поскольку каждое слагаемое в суммах не превосходит единицы, видим, что

$$\left| \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu z_1) - \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu z_2) \right| \leq 2.$$

Рассмотрим проекцию

$$\tilde{R}_1 = \{(x_1, x_2) \in [0, 1)^2 \mid \exists y_1 \exists y_2 : (x_1, y_1, x_2, y_2) \in R_1\}.$$

Мера множества \tilde{R}_1 тоже равна 1. Для $(\alpha, \beta) \in \tilde{R}_1$ и рассматриваемых значений n с учетом леммы 5 получаем

$$\left| \int_1^{q_n} \psi_\alpha(t) dt - \int_1^{r_n} \psi_\beta(t) dt \right| = |G_n(\alpha) - G_n(\beta)| = \left| \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu(\alpha, 0)) - \sum_{\nu=1}^n f(\hat{T}^\nu(\beta, 0)) \right| \leq 10.$$

Теорема 4 доказана.

Список литературы

- [1] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, Эргодическая теория, М., Наука (1980)
- [2] А. Я. Хинчин, Цепные дроби, М., Физматлит, (1960)
- [3] В. А. Иванов, О рациональных приближениях действительных чисел, Математические заметки, **т. 23, № 1** (1978) стр. 3-26
- [4] Hitoshi Nakada, Metrical Theory for a Class of Continued Fraction Transformations and Their Natural Extensions, Tokyo J. Math., **4, no. 2**, (1981), стр. 399–426
- [5] H. Nakada, Sh. Ito, S. Tanaka, On the invariant measure for the transformation associated with some real continued fraction, Keio Engrg. Rep. **30, no. 13**, (1977), p. 159–175
- [6] I.D. Kan, N.G. Moshchevitin, Approximations to two real numbers, Uniform Distribution Theory, **5, no. 2**, (2010), p. 79–86
- [7] H. Fürstenberg, Y. Katznelson. D. Ornstein, The ergodic theoretical proof of Szemerédi's theorem, Bulletin (New series) of the American Mathematical Society, **7 : 3**, (1982), p. 527–552
- [8] G. Halasz, Remarks on the remainder in Birkhoff's ergodic theorem, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica **28 (3-4)** (1976) p. 389–395
- [9] Thomas W. Cusick, Mary E. Flahive, The Markoff and Lagrange spectra, Mathematica surveys and monographs **30**, (1943)
- [10] Karma Dajani and Cor Kraaikamp, A Note on the Approximation by Continued Fractions under an Extra Condition, New York Journal of Mathematics, **3A**, (1998), p. 69–80